ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Στο τυχερό παιχνίδι του ΠΡΟΠΟ συμπληρώνουμε καθεμιά από τις 13 θέσεις με ένα από τα στοιχεία 1, 2, Χ που αντιστοιχούν σε πρόβλεψη: νίκης της γηπεδούχου ομάδας (1), νίκης της φιλοξενούμενης ομάδας (2), ισοπαλίας (Χ).

i) Να προσδιοριστεί το πλήθος των διαφορετικών στηλών που μπορούμε να συμπληρώσουμε.

ii) Αν συμπληρώσουμε τυχαία μια στήλη ΠΡΟΠΟ, να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων *A*: "να πιάσουμε ακριβώς 12 αγώνες".
_B_: "να πιάσουμε ακριβώς 11 αγώνες".

ΛΥΣΗ

i) Μια στήλη ΠΡΟΠΟ είναι μια 13-άδα, στην οποία κάθε θέση μπορεί να συμπληρωθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά $\underbrace{3\cdot 3\cdot 3 \ldots 3}_{13 \text{ παράγοντες}} = 3^{13} = 1.594.323$ διαφορετικές στήλες.

ii) • Ευνοϊκή περίπτωση για το *A* είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 12 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και η εναπομένουσα θέση συμπληρώνεται με λαθεμένη πρόβλεψη. Υπάρχουν $\binom{13}{12}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους 12 αγώνες που συμπληρώνονται με το σωστό αποτέλεσμα, και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε τον αγώνα που απομένει με λάθος πρόβλεψη. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το *A* είναι $N(A) = \binom{13}{12}\cdot 2$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{13}{12}\cdot 2}{3^{13}} = \frac{13\cdot 2}{3^{13}} = \frac{26}{3^{13}} \approx 0{,}000016 .$$

• Ευνοϊκή περίπτωση για το *B* είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 11 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις συμπληρώνεται με μια λαθεμένη πρόβλεψη. Υπάρχουν $\binom{13}{11}$ τρόποι για να επιλέξουμε τις 11 θέσεις με το σωστό αποτέλεσμα και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις με λαθεμένη πρόβλεψη. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το B είναι $N(B)=\binom{13}{11}\cdot 2\cdot 2$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{\binom{13}{11}\cdot 2\cdot 2}{3^{13}}=\frac{312}{3^{13}}\approx 0{,}000196\,.$$

2. Στο τυχερό παιχνίδι του ΛΟΤΤΟ "6 από 49", αν παίξουμε μια στήλη, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου *Α*: "να πετύχουμε 4 ακριβώς σωστά νούμερα";

ΛΥΣΗ

Επειδή τελικά δεν έχει σημασία η σειρά κλήρωσης του κάθε αριθμού, οι δυνατές περιπτώσεις του πειράματος είναι τόσες όσοι και οι συνδυασμοί των 49 ανά 6, δηλαδή $N(\Omega)=\binom{49}{6}$.

Για να βρούμε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων σκεφτόμαστε ως εξής: Υπάρχουν $\binom{6}{4}$ τρόποι για να επιλέξουμε 4 σωστά νούμερα από τα 6 που κληρώθηκαν. Στη συνέχεια μένουν $\binom{49-6}{6-4}=\binom{43}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα 2 λάθος νούμερα. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι $N(A)=\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}$. Άρα

$$P(A)=\frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}=\frac{13545}{13983816}\approx 0{,}000969 \text{ ή } 1‰ \text{ περίπου.}$$

3. Ποια είναι η πιθανότητα μεταξύ *κ* μαθητών ($\kappa\leq 365$) δύο τουλάχιστον να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα; (Ο χρόνος υπολογίζεται με 365 μέρες).

ΛΥΣΗ

Αν A είναι το ενδεχόμενο "δύο τουλάχιστον μαθητές να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα", τότε A' είναι το ενδεχόμενο "οι κ μαθητές να έχουν γενέθλια σε διαφορετικές μέρες" και ισχύει $P(A)=1-P(A')$. Επομένως ο υπολογισμός της $P(A)$ ανάγεται στον υπολογισμό της $P(A')$. Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος είναι $N(\Omega)=365\cdot 365\cdot 365\cdots 365=365^{\kappa}$, αφού ένας μαθητής μπορεί να έχει γεννηθεί σε μια από τις 365 μέρες του έτους. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το A' είναι $365\cdot(365-1)\cdot(365-2)...[(365-(\kappa-1)]$, αφού οι κ μαθητές πρέπει να έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές μέρες του έτους. Επομένως,

$$P(A')=\frac{365\cdot(365-1)\cdot(365-2)...(365-\kappa+1)}{365^{\kappa}}=\frac{365\cdot 364...(365-\kappa+1)}{365^{\kappa}}.$$

Άρα $$P(A)=1-\frac{365\cdot 364...(365-\kappa+1)}{365^{\kappa}}.$$

Οι τιμές του $P(A)$ για μερικές τιμές του κ δίνονται στον επόμενο πίνακα:

κ	10	20	23	30	60	70
$P(A)$	0,117	0,411	0,507	0,706	0,994	0,999

Παρατηρούμε ότι ήδη μεταξύ 23 ατόμων η πιθανότητα δύο άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα είναι μεγαλύτερη από 50%, ενώ μεταξύ 70 ατόμων το ενδεχόμενο αυτό είναι σχεδόν βέβαιο.